Quaternions et rotations

Michel Llibre

11 février 2015

Table des matières

Introduction

Nous présentons dans ce mémo l'essentiel de ce qu'il faut connaitre sur l'utilisation des quaternions pour la représentation des orientations. C'est un extrait d'un document plus complet "Représentation des attitudes - Angles d'Euler - Matrices de rotation - Quaternions" [1] dans lequel nous détaillons d'autres propriétés et en particulier les formules de dérivation de tous ces éléments et les méthodes d'intégration du vecteur vitesse de rotation, points qui ne sont pas abordés dans ce mémo.

1 Retour sur les complexes

Ce retour vers les nombres complexes a pour but de sensibiliser le lecteur aux notions de représentation d'une notion physique par une grandeur mathématique et aux diverses représentations mathématiques de cette grandeur. Ici il s'agit de la représentation des rotations dans le plan par des nombres complexes et des diverses représentations mathématiques de ces nombres : nombre complexe z, couple (x,y), couple (ρ,θ), complexe $\rho e^{i\theta}$. La représentation de la rotation θ par un nombre complexe n'est pas du tout pratique mais elle aidera à comprendre la représentation des rotations dans l'espace par les quaternions et les problèmes qu'elle pose.

1.1 Un tout petit peu d'histoire

Les nombres complexes ont été introduits par les mathématiciens italiens du XVI^{e} siècle (Tartaglia, Ferrari, Cardan, Bombelli) lors de leurs études des solutions des équations polynomiales. Maintenant, pratiquement tous les collégiens connaissent le fameux nombre imaginaire i dont le carré vaut -1 :

$$i^2 = -1$$

1.2 Diverses représentations des nombres complexes

En mécanique on dirait que les nombres complexes ont deux degrés de liberté indépendants l'un de l'autre, ce qui se traduit en mathématique en disant que ce sont des éléments d'un espace de dimension 2. Le nom z qui nomme génériquement un certain nombre complexe n'est pas une représentation mathématique qui permet de l'utiliser dans les calculs. Pour cela, il faut utiliser une représentation adéquate, et il y en a plusieurs.

1.2.1 Représentations par un point du plan complexe

Les *représentations non redondantes* à 2 paramètres permettent d'associer à z un point d'un plan :
- en coordonnées cartésiennes (a,b) avec a partie réelle associée à l'axe des abscisses et b partie imaginaire associée à l'axe des ordonnées,
- en coordonnées polaires (ρ,θ) avec ρ norme du nombre complexe et θ son angle polaire par rapport à l'axe des abscisses.

Pour z non nul , les paramètres de ces deux relations sont reliées par :

$$\left(\begin{array}{c} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \theta = \mathrm{atan2}\,(y,x) \end{array}\right)$$

où la fonction atan2 retourne l'angle polaire défini à 2π près et non pas à π près comme la fonction $\arctan(y/x)$.

Pour la représentation (a,b), on utilise également la forme algébrique $z = a + ib$ où le symbole $+$ est a priori un symbole de liaison, comme une virgule, mais qui a, a posteriori pour le corps des nombres complexes, la même propriété que l'addition : si $z_1 = a$ est un complexe dont la partie imaginaire est nulle et si $z_2 = ib$ est un complexe dont la partie réelle est nulle, leur somme dans le corps des complexes est le nombre complexe $z_3 = z_1 + z_2 = a + ib$. C'est la même addition que dans l'espace vectoriel de dimension 2 entre les vecteurs de composantes $(a,0)$ et $(0,b)$.

La forme $z = a+ib$ s'écrit également $z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ soit $z = \rho e^{i\theta}$ qui est une forme bien adaptée au calcul du produit des nombres complexes :

$$z_3 = z_1 z_2 \Rightarrow \rho_3 e^{i\theta_3} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \rho_3 = \rho_1\rho_2 \\ \theta_3 = \theta_1 + \theta_2 \end{array}\right.$$

Avec la forme $z_3 = a_3 + ib_3$ les calculs du produit sont plus lourds à effectuer :

$$a_3 + ib_3 = (a_1+ib_1)(a_2+ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i\,(a_1b_2 + b_1a_2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_3 = a_1a_2 - b_1b_2 \\ b_3 = a_1b_2 + b_1a_2 \end{array}\right.$$

1. http ://www.llibre.fr/copie_cert/DCSD-2009_008-NOT-003-1.1.pdf

1.2.2 Représentation par une matrice 2x2

Représentation matricielle redondante à 4 paramètres : La matrice :

$$z=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

peut également être utilisée comme représentation du nombre complexe z. Cette représentation conserve les propriétés d'addition (évident) et de multiplication des nombres complexes ce qui se vérifie facilement, par exemple sous la forme polaire :

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \rho_1\cos\theta_1 & -\rho_1\sin\theta_1 \\ \rho_1\sin\theta_1 & \rho_1\cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_2\cos\theta_2 & -\rho_2\sin\theta_2 \\ \rho_2\sin\theta_2 & \rho_2\cos\theta_2 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} \rho_1\cos\theta_1\rho_2\cos\theta_2-\rho_1\sin\theta_1\rho_2\sin\theta_2 & -\rho_1\cos\theta_1\rho_2\sin\theta_2-\rho_1\sin\theta_1\rho_2\cos\theta_2 \\ \rho_1\sin\theta_1\rho_2\cos\theta_2+\rho_1\cos\theta_1\rho_2\sin\theta_2 & \rho_1\cos\theta_1\rho_2\cos\theta_2-\rho_1\sin\theta_1\rho_2\sin\theta_2 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} \rho_1\rho_2\cos(\theta_1+\theta_2) & -\rho_1\rho_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \rho_1\rho_2\sin(\theta_1+\theta_2) & \rho_1\rho_2\cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}\\
&=\rho_1\rho_2\begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}\\
&=\rho_3\begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

1.3 Parallèle entre les représentations par complexes et par quaternions

Le nombre complexe z_1 peut être utilisé pour repérer l'angle θ_1 d'une rotation dans le plan. Pour cela, sa norme ρ_1 est une information inutile (mais elle doit être non nulle). De même z_2 peut être utilisé pour repérer l'angle θ_2 d'une deuxième rotation dans ce plan. La combinaison de ces deux rotations peut être repérée par le nombre complexe $z_3 = z_1z_2$ produit des 2. On a ainsi un moyen (bien lourd) pour calculer les combinaisons de rotations dans un plan au moyen de produits de nombres complexes. Comme la norme des nombres complexes utilisés est sans importance (à condition qu'elle soit non nulle), on peut choisir systématiquement $\rho = 1$. Avec cette restriction, les rotations dans le plan sont repérées par le nombre complexe $e^{i\theta}$, ce qui permet de remplacer l'addition des angles par une multiplication, ce qui est une idée bien saugrenue, d'autant plus qu'avec l'addition on peut éventuellement compter les tours, alors qu'avec la multiplication, on aura un résultat à $2k\pi$ près.

Les rotations dans le plan sont simples car leur combinaison est simplement additive, ce qui n'est pas le cas des rotations autour d'axes de directions différentes dans l'espace. C'est là qu'interviennent les quaternions également appelés nombres hyper-complexes.

Les quaternions ont été introduits par Hamilton en 1843. Il construit un ensemble de quadruplets qui étend à l'espace les propriétés des nombres complexes dans le plan. Les quaternions Q sont ainsi des éléments d'un espace de dimension 4, dont nous noterons (S,X,Y,Z) les 4 composantes d'une représentation non redondante de type cartésien. Ils peuvent être utilisés pour représenter une rotation $\mathcal{R}$ dans l'espace. Dans cette représentation d'une rotation $\mathcal{R}$ par un quaternion Q, la combinaison de la rotation $\mathcal{R}_1$ (représentée par Q_1) suivie de la rotation $\mathcal{R}_2$ (représentée par Q_2) est une rotation $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ (représentée par Q_3) qui correspond au produit des quaternions : $Q_3 = Q_2Q_1$ que nous présenterons plus loin.

Une rotation dans l'espace ne dépend que de 3 paramètres indépendants [2]. Les 4 composantes du quaternion sont donc en nombre redondant pour cette représentation. La norme du quaternion (à condition qu'elle soit non nulle) n'est pas significative pour la représentation d'une rotation dans l'espace. Le quaternion $(\lambda S,\lambda X,\lambda Y,\lambda Z)$ avec $\lambda \neq 0$ représente la même rotation que le quaternion (S,X,Y,Z), et il peut être utilisé à sa place lors des divers produits effectués pour représenter des combinaisons de rotations. Comme dans l'exemple précédent avec les nombres complexes où la rotation est représentée sans redondance par $e^{i\theta}$, on peut n'utiliser que des quaternions de norme unité $q = (s,x,y,z)$ tels que $s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$, cette liaison ramenant le nombre de paramètres indépendants à 3. Ceci n'a rien d'une obligation, mais facilite grandement les calculs car l'inverse d'un quaternion unité est également un quaternion unité [3].

Mais même avec cette restriction, il n'y a pas une bijection parfaite entre les points de l'hypersphère de rayon 1 de l'espace des quaternions (ensemble des quaternions de norme unité) et les rotations dans l'espace physique. En effet, λq représentant la même rotation que q, pour $\lambda = -1$ on voit que les 2 points q et $-q$ opposés sur l'hypersphère unité représentent la même rotation. On n'a donc besoin pour représenter toutes les rotations de l'espace physique que d'une demi-hypersphère de rayon unité. Mais se limiter à une demi-hypersphère pose des problèmes dans la continuité de la représentation qui sont rédhibitoires pour le traitement des trajectoires continues en attitude. Il vaut donc mieux s'habituer

2. par exemple les 3 angles des 3 rotations successives autour de 3 axes de précession, nutation et rotation propre (système d'Euler).
3. L'inverse d'un quaternion de norme unité est son conjugué que nous définirons plus loin. Il est donc très simple à exprimer.

à gérer cette double représentation. Si la continuité n'est pas nécessaire dans l'application, on peut, par exemple, choisir en permanence la représentation avec $s \geq 0$. Mais cette limitation peut conduire à des résultats incongrus lorsque la continuité est nécessaire. Considérons par exemple les 3 quaternions successifs $q(t-\tau) = \left(-\tau, \sqrt{1-\tau^2}, 0, 0\right)$, $q(t) = (0,1,0,0)$ et $q(t+\tau) = \left(\tau, \sqrt{1-\tau^2}, 0, 0\right)$ avec τ très petit.. Une estimation du quaternion dérivé $\dot{q}(t)$ est par exemple donnée par

$$\dot{q}(t) \simeq \frac{q(t+\tau) - q(t-\tau)}{2\tau} \simeq (1,0,0,0)$$

Si on choisit de ne considérer que les représentations avec $s \geq 0$, en prenant $q(t-\tau) = \left(\tau, -\sqrt{1-\tau^2}, 0, 0\right)$, l'estimation précédente conduira à un résultat erroné :

$$\dot{q}(t) \simeq \frac{q(t+\tau) - q(t-\tau)}{2\tau} \simeq \left(0, \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau}, 0, 0\right)$$

Remarque : La trajectoire précédente est situé sur la sphère de rayon 1. Le vecteur vitesse $\dot{q}(t)$ est donc tangent à cette sphère, normal à son rayon $q(t) = (0,1,0,0)$, ce qu'on peut vérifier avec l'estimation $\dot{q}(t) \simeq (1,0,0,0)$ mais pas avec la suivante.

Résumé : La représentation des rotations dans l'espace par des quaternions n'est pas biunivoque. A une rotation $\mathcal{R}$ est associée un ensemble de quaternions λQ avec $\lambda \neq 0$. Pour des raisons pratiques on se limite généralement aux quaternions de norme unité, mais même dans ce cas, à la rotation $\mathcal{R}$ sont associés 2 quaternions distincts, q et $-q$.

A une trajectoire $Q(t)$ dans l'espace des quaternions on peut faire correspondre une trajectoire en rotation $\mathcal{R}(t)$. Si on décompose la vitesse $\dot{Q}(t)$ en un terme radial $\dot{Q}_N(t)$ et un terme tangentiel $\dot{Q}_T(t)$ à la sphère passant par $Q(t)$, seul $\dot{Q}_T(t)$ produit une vitesse de rotation $\Omega(t)$. Si $\dot{Q}_T(t)$ est nul, $\Omega(t)$ l'est également, quelque soit $\dot{Q}_N(t)$. On peut ainsi décrire des trajectoires en rotation $\mathcal{R}(t)$ à l'aide trajectoires analytiques polynomiales en quaternion qui ne respectent pas la contrainte de norme unité (ce qu'on ne saurait pas faire), sans que cela pose problème. En effet, à une trajectoire $\mathcal{R}(t)$ correspond une infinité de trajectoires $Q(t)$, déduites les unes des autres par des déplacement radiaux. A une trajectoire $\mathcal{R}(t)$ dans l'espace de dimension 3 des rotations correspond une surface réglée par des rayons issus de l'origine dans l'espace des quaternions, tout déplacement radial dans l'espace des quaternions étant sans incidence dans l'espace des rotations.

2 Diverses représentations des rotations

Dans ce qui suit nous considérons que l'orientation ou attitude d'un repère est représentée par la rotation qui fait passer d'un repère choisi comme repère origine au repère considéré. Par ailleurs, nous considérons que les 3 substantifs *orientation*, *attitude* et *rotation* sont 3 synonymes. Ce choix a le gros défaut d'ignorer l'effet produit par des tours complets (angles multiples de 2π) de rotation autour d'un axe (on ne saura pas dérouler un fil qui fait plusieurs tours).

2.1 Représentation classique par 3 angles

En pratique, pour l'interprétation humaine, les rotations sont représentées par les 3 angles des 3 rotations successives autour de 3 axes de base, comme par exemple :

- les angles ψ de **cap** autour de z_0, θ d'**assiette longitudinale** autour de y_1 et φ de **roulis** autour de x_2 sont utilisés en aéronautique,
- les angles ψ de **précession** autour de z_0, θ de **nutation** autour de x_1 et φ de **rotation propre** autour de z_2 sont utilisés pour l'étude des gyroscopes (angles d'Euler).

Bien que ces représentations n'aient que 3 degrés de liberté, elles présentent toutes des redondances parasites. Dans le cas des angles aéronautiques on a l'équivalence suivante :

$$(\psi, \theta, \varphi) \equiv (\pi + \psi, \pi - \theta, \pi + \phi)$$

et pour les angles d'Euler, on a l'équivalence :

$$(\psi, \theta, \varphi) \equiv (\pi + \psi, -\theta, \pi + \phi)$$

2.2 La représentation par les paramètres d'Euler

Euler a montré que les combinaisons de rotations, aussi complexes soient elles pouvaient s'obtenir au moyen d'une rotation unique qui met donc en jeu un axe unique (dont nous noterons $\vec{u}$ le vecteur unitaire) et un angle de rotation α

autour de cet axe. Une rotation quelconque peut donc être représentée par le couple $(\alpha, \vec{u})$. La direction $\vec{u}$ ne dépendant que de 2 paramètres (l'azimut et le site de la direction par exemple), cette représentation n'a donc que 3 degrés de liberté. Toutefois, elle présente elle aussi des redondances parasites. En effet, les couples $(\alpha + 2k\pi, \vec{u})$ et $(-\alpha + 2n\pi, -\vec{u})$ avec k et n entiers quelconques représentent tous la même attitude.

D'un point de vue pratique $\vec{u}$ sera repéré par ses 3 composantes (u_x, u_y, u_z) *dans une certaine base.*

2.3 Représentations par vecteurs de l'espace de dimension 3

2.3.1 Le vecteur rotation

Personnellement, comme quelques rares ingénieurs programmant des trajectoires en attitudes, j'utilise beaucoup le vecteur $\vec{V} = \alpha\vec{u}$ fabriqué à partir des paramètres d'Euler. Il a l'intérêt de ne posséder que 3 degrés de liberté et de ne présenter aucune redondance parasite (en omettant le problème des multiples de 2π).

2.3.2 Autres vecteurs de dimension 3

D'autres vecteurs, de l'espace de dimension 3, fabriqués à partir des paramètres d'Euler sont utilisés comme $\vec{u}\sin\frac{\alpha}{2}$, $\vec{u}\tan\frac{\alpha}{2}$, et $\vec{u}\tan\frac{\alpha}{4}$,...

2.4 Représentation par matrices de rotation

C'est la représentation la plus pratique pour les calculs (changements de base, etc...). La matrice étant unitaire, elle impose 6 relations indépendantes à ses 9 éléments, ce qui fait que cette représentation n'offre que les 3 degrés de liberté nécessaires. Comme le vecteur rotation, elle ne présente aucune redondance parasite. La relation qui exprime ses composantes en fonction des paramètres d'Euler est la suivante :

$$\mathcal{M} = I + \sin\alpha\,(u\times) + (1-\cos\alpha)\,(u\times)^{\,2} \tag{1}$$

I représente le tenseur identité dont les composantes sont $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans n'importe quelle base.

$(u\times)$ représente le tenseur antisymétrique adjoint au vecteur $\vec{u}$. Dans la base associée à celle [4] où les composantes de $\vec{u}$ sont (u_x, u_y, u_z) ce tenseur antisymétrique a pour composantes :

$$(u\times) = \begin{pmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{pmatrix}$$

Les composantes de $\mathcal{M}$ sont ainsi obtenues dans la base où sont exprimées les composantes de $\vec{u}$.

Inversement, on peut calculer les paramètres d'Euler (α, u_x, u_y, u_z) à partir des composantes m_{ij} de $\mathcal{M}$ (dans la base où ces composantes sont exprimées). En identifiant les parties symétriques et antisymétriques de la relation (1), on a :

$$\cos\alpha = \frac{m_{11} + m_{22} + m_{33} - 1}{2}$$
$$\sin\alpha\ (u) = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} m_{32} - m_{23} \\ m_{13} - m_{31} \\ m_{21} - m_{12} \end{pmatrix}$$

Ces relations laissent le choix sur le signe de α, en changeant le sens de $\vec{u}$, ce qui est normal puisque $(\alpha, \vec{u})$ et $(-\alpha, -\vec{u})$ représentent la même rotation.

Pour α voisin de 0 où π ces relations sont mal conditionnées pour déterminer les composantes de $\vec{u}$. Cela est sans importance pour α voisin de zéro puisque dans ce cas il n'y a pas de rotation. Par contre pour α voisin de π, la direction

4. Les opérateurs ont 9 composantes. Ce sont des éléments d'un espace vectoriel de type $\mathbb{R}^9$. La base de cet espace qui est associée à la base de l'espace $\mathbb{R}^3$ constituée par les 3 vecteurs orthonormés $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ est constituée des 9 vecteurs de base que nous notons abusivement (pour aider à la compréhension) $\vec{v}_1 = e_1e_1^T$, $\vec{v}_2 = e_1e_2^T$, $\vec{v}_3 = e_1e_3^T$, $\vec{v}_4 = e_2e_1^T$, ... ,$\vec{v}_9 = e_3e_3^T$. Si on exprime ces différents vecteurs dans ces 2 bases, on a tout simplement $(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $(v_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par la suite, nous ne préciserons plus cette association et ferons comme si la base des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ était également la base des opérateurs de $\mathbb{R}^9$.

autour de laquelle se fait le demi-tour est importante, et on doit faire appel à d'autres relations pour la déterminer. On pourra utiliser les relations suivantes tirées de la partie symétrique :

$$
\begin{aligned}
u_x^2 &= \frac{m_{11} - \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} \\
u_y^2 &= \frac{m_{22} - \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} \\
u_z^2 &= \frac{m_{33} - \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}
\end{aligned}
$$

qui donnent les valeurs absolues des composantes avec précision. Les signes sont obtenus par les relations précédentes.

2.5 Représentation par quaternions

Les composantes d'un quaternion associé à une rotation s'obtiennent facilement à partir des paramètres d'Euler. Ce sont tout simplement :

$$
s = \cos\frac{\alpha}{2} \text{ et } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sin\frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}
$$

Ce quaternion $q = (s, x, y, z)$ est de norme unité. Tous les quaternions $Q = \lambda q$ avec $\lambda \neq 0$ représentent la même rotation (et en particulier $-q$).

Inversement, à partir de (s, x, y, z) ces relations fournissent $\frac{\alpha}{2}$ et $\vec{u}$, en laissant, comme précédemment le choix du signe de α, associé au sens de $\vec{u}$.

On peut directement calculer les composantes de $\mathcal{M}$ à partir de celle de q par les relations suivantes :

$$
\mathcal{M} = s^2 I + 2s\,(v\times) + vv^T + (v\times)^2
$$

où $(v\times)$ est le tenseur antisymétrique associé à la partie vectorielle $v = (x, y, z)^T$ du quaternion. Attention : Certains auteurs (et moi-même) utilisent parfois la notation $\tilde{v}$ pour ce tenseur antisymétrique.

Dans cette relation q doit impérativement être de norme unité. Dans le cas contraire la matrice obtenue ne sera pas unitaire. Si on dispose d'un quaternion non normé, il faut diviser ses composantes par sa norme [5] avant d'utiliser cette relation.

Inversement (s, x, y, z) peuvent être calculés à partir des m_{ij} en utilisant les relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{4}(1 + m_{11} + m_{22} + m_{33}) \\
x^2 &= \frac{1}{4}(1 + m_{11} - m_{22} - m_{33}) \\
y^2 &= \frac{1}{4}(1 - m_{11} + m_{22} - m_{33}) \\
z^2 &= \frac{1}{4}(1 - m_{11} - m_{22} + m_{33})
\end{aligned}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
sx &= \tfrac{1}{4}(m_{32} - m_{23}) \\
sy &= \tfrac{1}{4}(m_{13} - m_{31}) \\
sz &= \tfrac{1}{4}(m_{21} - m_{12})
\end{aligned}
$$

Étant donné que le sens de q est indifférent, on peut choisir le signe de s et calculer sa valeur par la première relation du premier groupe, puis calculer x, y et z par le deuxième groupe de relations. Si s est voisin de zéro, on peut calculer la plus grande des composantes de v par une équation du premier groupe, puis calculer les deux autres et s à partir des produits du dernier groupe.

5. Nous utilisons toujours le mot norme dans son sens commun euclidien, à savoir $\rho = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$. Dans *l'algèbre des quaternions* (algèbre = espace vectoriel muni d'une multiplication) le mot norme désigne le produit du quaternion par son conjugué à savoir ρ^2. Pour $\rho = 1$ on peut faire la confusion. Dans les autres cas, il faut savoir de quelle norme on parle.

3 L'algèbre des quaternions

Cette section relativement théorique peut être sautée par le lecteur pressé à l'exception des formules (2) et (6) qui permettent de calculer le produit de deux quaternions.

D'un point de vue mathématique les quaternions sont des éléments d'un ensemble H qui est en premier lieu un espace vectoriel euclidien de dimension 4. Cet espace est partitionné en deux sous espaces orthogonaux, l'un de dimension 1 appelé *sous-espace scalaire* (ou abusivement réel) et l'autre de dimension 3 appelé *sous-espace pur* (ou abusivement vectoriel). Ainsi un quaternion quelconque Q se décompose d'une manière unique en une somme de deux quaternions dont l'un est scalaire S[6] et dont l'autre est pur V :

$$Q = S + V$$

Dans cette expression S et V sont tous les deux des quaternions. Les seules bases considérées dans l'espace de dimension 4 sont des bases orthonormées. Les changements de bases autorisés sont des changements qui ne modifient pas la partition en sous espace scalaire et pur. On aura ainsi toujours le même vecteur unitaire de base E_0 pour le sous-espace scalaire et diverses sous-bases orthonormées $\{E_1, E_2, E_3\}$ pour le sous-espace pur. Si on a $S = sE_0$ et $V = xE_1 + yE_2 + zE_3$, dans un changement de base autorisé les composantes x, y, z vont varier, mais pas la composante s.

3.1 Produit de 2 quaternions

Étant donnés 2 quaternions $Q_1 = S_1 + V_1$ et $Q_2 = S_2 + V_2$, on définit une deuxième loi de composition interne (la première étant l'addition), de type multiplicatif, notée sans symbole, comme ceci Q_1Q_2, par la règle de calcul suivante :

$$Q = Q_1Q_2 = S + V \quad \rightarrow \quad \begin{cases} s = s_1s_2 - V_1 \cdot V_2 \\ v = s_1V_2 + s_2V_1 + V_1 \times V_2 \end{cases} \tag{2}$$

où :
- s, s_1, s_2 représentent les composantes scalaires des quaternions,
- $V_1 \cdot V_2$ représente le produit scalaire dans R^3 (attention, on utilise la même notation pour désigner les vecteurs de R^3 et les quaternions purs de H),
- $V_1 \times V_2$ représente le produit vectoriel dans R^3.

Avec cette deuxième loi de composition interne, les quaternions deviennent éléments d'une algèbre H de dimension 4.

Cette multiplication n'est pas commutative en général. Elle l'est dans les cas particuliers suivants :
1. Q_1 ou Q_2 est un quaternion scalaire,
2. V_1 et V_2 sont parallèles.

Remarque :

Si $V_1 = 0$, on obtient $s = s_1s_2$ et $v = s_1v_2$ soit $Q = s_1Q_2$. La multiplication (de l'algèbre quaternion) d'un quaternion Q_2 par un quaternion scalaire S_1, donne pour résultat le quaternion Q_2 multiplié par le scalaire s_1. Il en résulte qu'*on peut confondre les quaternions scalaires et les scalaires dans les opérations de multiplication*.

Étant donné une base $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$, il en résulte la table de multiplication suivante :

$Q1\backslash Q2$	E_0	E_1	E_2	E_3
E_0	E_0	E_1	E_2	E_3
E_1	E_1	$-E_0$	E_3	$-E_2$
E_2	E_2	$-E_3$	$-E_0$	E_1
E_3	E_3	E_2	$-E_1$	$-E_0$

Dans cette table on voit que $E_iE_i = \pm E_0$ ($+$ si $i = 0$ et $-$ dans le cas contraire), que $E_0E_i = E_i$ quel que soit E_i et pour i et j non nuls (E_i et E_j dans le sous-espace pur) $E_iE_j = E_i \times E_j$ où dans le second membre E_i et E_j sont considérés comme des vecteurs de R^3, mais le résultat est à nouveau considéré comme un quaternion pur.

3.2 Quaternion unité

C'est le quaternion Q_e tel que quel que soit Q non nul, $QQ_e = Q_eQ = Q$. On peut vérifier que c'est le quaternion scalaire E_0, c'est-à-dire le quaternion qui a pour composantes $(1, 0, 0, 0)$

Par abus de notations et pour les simplifier, nous confondrons les quaternions scalaires et les scalaires. Il en résulte que le vecteur de base E_0 sera systématiquement omis. Ainsi $Q = S + V = sE_0 + V$ sera simplement noté $Q = s + V$.

Toujours par abus, nous utilisons systématiquement, comme nous l'avons déjà fait, la même notation pour le quaternion pur V et le vecteur V associé dans R^3.

6. Dans les sections précédentes s représentait la composante scalaire d'un quaternion de norme unité et S la composante scalaire d'un quaternion de norme différente. Ici, S représente un quaternion dont seule la composante scalaire est non nulle. Cette composante est notée s pour la différencier du quaternion. Dans ce qui suit les minuscules s, x, y, z ne sont plus réservées aux quaternions de norme unité.

3.3 Quaternion conjugué

On définit le quaternion conjugué Q^* d'un quaternion $Q = s + V$ par :

$$Q^* = s - V$$

Il a même partie scalaire et sa partie pure est changée de signe.

3.4 Norme d'un quaternion

On définit la norme $n(Q)$ d'un quaternion $Q = s + V$ par :

$$n(Q) = QQ^*$$

C'est un quaternion scalaire. On peut vérifier que :

$$n(Q) = n(Q^*) = s^2 + \|V\|^2 = \|Q\|^2$$

où $\|V\|^2$ représente le carré du module euclidien dans R^3 (ou R^4) et où $\|Q\|^2$ représente le carré du module euclidien dans R^4. Notons x, y et z les composantes de V dans une base orthonormée de R^3. Il vient :

$$n(Q) = s^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

On pourra vérifier que cette norme est multiplicative :

$$n(Q_1 Q_2) = n(Q_1)\, n(Q_2)$$

3.5 Quaternion unitaire

C'est un quaternion de norme unité :

$$n(Q) = 1 \ \Leftrightarrow \|Q\| = 1$$

3.6 Quaternion inverse

On définit le quaternion inverse Q^{-1} d'un quaternion Q non nul par :

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = 1$$

La relation

$$1 = \frac{QQ^*}{n(Q)}$$

montre que :

$$Q^{-1} = \frac{1}{n(Q)} Q^* = \frac{Q^*}{\|Q\|^2}$$

Il en résulte que H constitue un corps non commutatif appelé corps des quaternions de *Hamilton*, et parfois nombres hyper-complexes.

Remarque :

$$\boxed{Q \text{ unitaire } \rightarrow Q^{-1} = Q^*}$$

3.7 Propriétés diverses

1. Le carré d'un quaternion pur est un scalaire : $VV = -\|V\|^2$
2. Le quaternion produit d'un quaternion quelconque Q par un quaternion pur est orthogonal (dans R^4) à Q :

   $$(VQ) \cdot Q = 0$$
   $$(QV) \cdot Q = 0$$

   où ici le "·" symbolise le produit scalaire dans H (même résultat que pour le produit d'un complexe w par un imaginaire pur qui est orthogonal à w dans R^2).
3. Le carré d'un quaternion quelconque est un quaternion quelconque (de même que le carré d'un complexe quelconque est un complexe quelconque).

4. Triple produit “rotation” : Considérons le quaternion $Q = s + V = Q_1 Q_2 Q_1^{-1}$. En notant $n_1 = \|Q_1\|^2 = s_1^2 + \|V_1\|^2$, on trouve :

$$\begin{aligned} s &= s_2 \\ V &= \frac{1}{n_1}\left(s_1^2 V_2 + V_1\,(V_1 \cdot V_2) + 2s_1\,(V_1 \times V_2) + V_1 \times (V_1 \times V_2)\right) \end{aligned}$$

soit compte tenu de la relation $V_1\,(V_1 \cdot V_2) - V_1 \times (V_1 \times V_2) = \|V_1\|^2 V_2$:

$$V = V_2 + \frac{2}{n_1} s_1\,(V_1 \times V_2) + \frac{2}{n_1} V_1 \times (V_1 \times V_2)$$

En notant $Q_1' = s_1' + V_1'$ le quaternion unitaire porté par Q_1 ($s_1' = \frac{1}{\|Q_1\|} s_1$ et $V_1' = \frac{1}{\|Q_1\|} V_1$), il vient :

$$s + V = Q_1 Q_2 Q_1^{-1} \to \left\{ \begin{array}{c} s = s_2 \\ V = V_2 + 2s_1'\,(V_1' \times V_2) + 2V_1' \times (V_1' \times V_2) \end{array} \right. \tag{3}$$

5. Formules remarquables :

$$\tfrac{1}{2}\,(Q_1 Q_2 - Q_2 Q_1) = V_1 \times V_2 \tag{4}$$

$$V_1 \cdot V_2 = -\tfrac{1}{2}\,(V_1 V_2 + V_2 V_1) \tag{5}$$

4 Diverses réalisations des quaternions

La règle de multiplication, telle que nous l’avons présentée n’est pas très pratique. Il existe diverses réalisations des quaternions qui offrent des règles de multiplication plus pratiques. Citons parmi ces réalisations :

4.1 Matrices complexes 2×2

Notons les complexes conjugués avec une barre supérieure : Si $w = x + iy$, on note $\bar{w} = x - iy$.
On associe au quaternion Q une matrice M de la forme :

$$Q \leftrightarrow M = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$$

Ces matrices constituent une algèbre isomorphe à H. En sus de la correspondance produit de quaternion, produit de matrices, on a les correspondances suivantes :

$$Q = \begin{pmatrix} s \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = s - iz \\ v = -y - ix \end{array} \right.$$

$$Q^* \leftrightarrow \overline{M}^T$$

$$\mathbf{1} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} \leftrightarrow M^{-1} = \tfrac{1}{n(Q)}\,\overline{M}^T$$

et dans le cas particulier des quaternions unitaires :

$$Q \text{ unitaire } \to M^{-1} = \overline{M}^T$$

De plus :

$$n\,(Q) = \det\,(M) = |u|^2 + |v|^2 = s^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

4.2 Matrices réelles 4×4

Les deux correspondances utilisées sont :

$$1) \qquad Q = \begin{pmatrix} s \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftrightarrow M = \begin{pmatrix} s & -x & -y & -z \\ x & s & -z & y \\ y & z & s & -x \\ z & -y & x & s \end{pmatrix}$$

$$2) \qquad Q = \begin{pmatrix} s \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftrightarrow M = \begin{pmatrix} s & x & y & z \\ -x & s & -z & y \\ -y & z & s & -x \\ -z & -y & x & s \end{pmatrix}$$

avec :

$$\det(M) = \left(s^2 + x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = n^2(Q) = \|Q\|^4$$

dans les deux cas.

Dans la première correspondance, les 4 composantes du quaternion se retrouvent dans la première colonne de la matrice M, la première ligne contenant les composantes du quaternion conjugué. A l'opposé, dans la deuxième, les 4 composantes du quaternion se retrouvent dans la première ligne de la matrice M, la première colonne contenant les composantes du quaternion conjugué. Dans les deux cas la diagonale principale contient la partie scalaire et la partie antisymétrique de la sous-matrice 3×3 inférieure est constitué de l'adjoint de la partie pure. Pour ces deux réalisations on a bien évidemment la correspondance :

$$Q_3 = Q_1 Q_2 \leftrightarrow M_3 = M_1 M_2$$

avec produit de quaternion au premier membre de la correspondance et produit matriciel au deuxième.

Par ailleurs, on peut vérifier que dans les deux cas :

$$Q^* \leftrightarrow M^T$$

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} \leftrightarrow M^{-1} = \frac{1}{n(Q)} M^T$$

car adjointe$(M) = n(Q)M^T$.

Dans le cas particulier des quaternions unitaires :

$$Q \text{ unitaire } \rightarrow M^{-1} = M^T$$

Ces deux réalisations sont aussi pratiques l'une que l'autre. Personnellement nous préférons utiliser la première car si on substitue (abusivement comme ci-dessus) au quaternion Q le vecteur colonne de ses composantes, le produit de quaternion peut s'écrire dans ce mélange matriciel :

$$Q_3 = M_1 Q_2$$

alors qu'avec la deuxième correspondance on aurait en considérant les vecteurs lignes Q^T : $Q_3^T = Q_1^T M_2$ qui est une écriture plus lourde et moins habituelle que la précédente.

La relation précédente se détaille en :

$$\begin{pmatrix} s_3 \\ x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & -x_1 & -y_1 & -z_1 \\ x_1 & s_1 & -z_1 & y_1 \\ y_1 & z_1 & s_1 & -x_1 \\ z_1 & -y_1 & x_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

c'est une forme très pratique pour calculer un produit de quaternions.

5 Composantes et changements de base

Avant de présenter l'utilisation des quaternions pour le traitement des problèmes d'orientation, examinons leurs traitements avec les matrices unitaires 3x3, car leur traitement avec des quaternions sera quasiment identique.

5.1 Changement de base d'un vecteur

Considérons un vecteur $\vec{V}$, deux bases $\mathcal{B}_A$ et $\mathcal{B}_B$. Nous noterons $(V)_A$ le vecteur colonne des composantes de $\vec{V}$ dans la base $\mathcal{B}_A$ et $(V)_B$ le vecteur colonne des composantes de $\vec{V}$ dans la base $\mathcal{B}_B$. Remarque : $(V)_A$ se lit "v dans a". Quand on parle de matrice de changement de base, il est important de préciser ses notations. Généralement les auteurs utilisent une matrice de changement de base C sans autre précision et il faut chercher pour savoir si elle opère dans le sens $(V)_A = C\,(V)_B$ ou $(V)_B = C\,(V)_A$. Grossièrement le monde des utilisateurs est partagé en deux. Ceux pour qui la bonne formule est la première et ceux pour qui c'est la seconde. Pour ne pas trancher, je rajoute des indices qui permettent de différencier les deux cas :

$$(V)_A = C_{AB}\,(V)_B \text{ et } (V)_B = C_{BA}\,(V)_A \text{ avec } C_{AB} = C_{BA}^T = C_{BA}^{-1} \text{ et } C_{BA} = C_{AB}^T = C_{AB}^{-1}$$

Pourquoi avoir choisi ce sens pour les indices au lieu, par exemple de $(V)_A = C_{B/A}\,(V)_B$. Parce que si on considère une troisième base $\mathcal{B}_C$ et les composantes de $(V)_C$ du vecteur $\vec{V}$ dans cette base, les matrices de changement de base C_{AB}, C_{BC} et C_{AC} sont liées par la relation :

$$C_{AC} = C_{AB}C_{BC}$$

qui est très simple à mémoriser (du type relation de Chasles $AC = AB + BC$).

Remarque :

$$\begin{array}{l} (i_B)_A = C_{AB}\,(i_B)_B \\ (j_B)_A = C_{AB}\,(j_B)_B \\ (k_B)_A = C_{AB}\,(k_B)_B \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} i_B & j_B & k_B \end{array}\right]_A = C_{AB}\left[\begin{array}{ccc} i_B & j_B & k_B \end{array}\right]_B$$

or $\left[\begin{array}{ccc} i_B & j_B & k_B \end{array}\right]_B = \mathbf{I}$, d'où :

$$C_{AB} = \left[\begin{array}{ccc} i_B & j_B & k_B \end{array}\right]_A = (B_B)_A$$

et plus généralement :

$$\begin{aligned} C_{AB} &= \left[\begin{array}{ccc} i_B & j_B & k_B \end{array}\right]_A = \left[\begin{array}{ccc} i_A & j_A & k_A \end{array}\right]_B^T \\ C_{BA} &= \left[\begin{array}{ccc} i_B & j_B & k_B \end{array}\right]_A^T = \left[\begin{array}{ccc} i_A & j_A & k_A \end{array}\right]_B \end{aligned}$$

5.2 Changement de base d'un opérateur

Considérons un opérateur quelconque $\mathcal{T}$ qui transforme un vecteur $\vec{V}$ en vecteur $\vec{W} = \mathcal{T}\left(\vec{V}\right)$. On a en composantes dans $\mathcal{B}_A$ et $\mathcal{B}_B$:

$$\begin{aligned} (W)_A &= (T)_A\,(V)_A \\ (W)_B &= (T)_B\,(V)_B \end{aligned}$$

où $(T)_A$ et $(T)_B$ sont les matrices 3x3 des composantes de $\mathcal{T}$ dans les bases $\mathcal{B}_A$ et $\mathcal{B}_B$. Dans la dernière relation, en utilisant les changements de base $(W)_B = C_{BA}\,(W)_A$ et $(V)_B = C_{BA}\,(V)_A$ on voit que $C_{BA}\,(W)_A = (T)_B C_{BA}\,(V)_A$ soit $(W)_A = C_{AB}\,(T)_B C_{BA}\,(V)_A$, ce qui montre que :

$$(T)_A = C_{AB}\,(T)_B C_{AB}^T$$

qui est la formule bien connue de changement de base des opérateurs.

5.3 Rotation d'un vecteur - Composition de rotations

Considérons la rotation $\mathcal{R}_{AB}$ qui transforme la base $\mathcal{B}_A$ en base $\mathcal{B}_B$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{R}_{AB}\left(\vec{i}_A\right) = \vec{i}_B$, $\mathcal{R}_{AB}\left(\vec{j}_A\right) = \vec{j}_B$ et $\mathcal{R}_{AB}\left(\vec{k}_A\right) = \vec{k}_B$, ce que nous écrirons plus succinctement $\mathcal{R}_{AB}\,(\mathcal{B}_A) = \mathcal{B}_B$. Considérons également les rotations $\mathcal{R}_{BC}$ et $\mathcal{R}_{AC}$. On a, avec ces notations :

$$\mathcal{R}_{BC}\,(\mathcal{R}_{AB}\,(\mathcal{B}_A)) = \mathcal{B}_C \Leftrightarrow \mathcal{R}_{AC}\,(\mathcal{B}_A) = \mathcal{B}_C$$

La composition des rotations $\mathcal{R}_{AB}$ suivie de $\mathcal{R}_{BC}$ est notée $\mathcal{R}_{AC}$, soit mathématiquement :

$$\mathcal{R}_{AC} = \mathcal{R}_{BC} \circ \mathcal{R}_{AB} \tag{7}$$

relation dans laquelle les indices sont inversés par rapport au produit des matrices de changement de base précédent. Mais ici, il ne s'agit pas d'un produit de matrices mais d'une composition d'opérateurs. Pour passer au produit de matrices il faut considérer les composantes de ces opérateurs dans une certaine base.

Considérons par exemple les composantes dans la base $\mathcal{B}_A$. Les premières relations s'écrivent :

$$\begin{array}{l}(R_{AB})_A\,(i_A)_A = (i_B)_A \\ (R_{AB})_A\,(j_A)_A = (j_B)_A \\ (R_{AB})_A\,(k_A)_A = (k_B)_A\end{array} \rightarrow (R_{AB})_A \begin{bmatrix} i_A & j_A & k_A \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} i_B & j_B & k_B \end{bmatrix}_A$$

d'où :

$$(R_{AB})_A = C_{AB}$$

En appliquant la formule de changement de base des opérateurs, on a :

$$(R_{AB})_B = C_{BA}\,(R_{AB})_A\,C_{BA}^T = C_{AB}^T\,(R_{AB})_A\,C_{AB}$$

d'où en remplaçant $(R_{AB})_A$ par C_{AB} :

$$(R_{AB})_B = C_{AB} = (R_{AB})_A$$

C'est un résultat remarquable qui se comprend bien à partir des paramètres d'Euler $(\alpha_{AB}, \vec{u}_{AB})$ de la rotation $\mathcal{R}_{AB}$. Lorsque $\alpha_{AB} = 0$, les bases $\mathcal{B}_A$ et $\mathcal{B}_B$ sont identiques. Le vecteur $\vec{u}_{AB}$ a alors des composantes identiques dans ces deux bases : $(u_{AB})_A = (u_{AB})_B$. La rotation α_{AB} de $\mathcal{B}_B$ par rapport à $\mathcal{B}_A$ se produit autour de $\vec{u}_{AB}$ qui reste fixe dans $\mathcal{B}_A$. Les composantes $(u_{AB})_A$ sont donc des constantes. Mais on peut considérer que $\mathcal{B}_B$ reste fixe et que $\mathcal{B}_A$ tourne d'un angle $-\alpha_{AB}$ autour de $\vec{u}_{AB}$ qui reste fixe dans $\mathcal{B}_B$. Les composantes $(u_{AB})_B$ sont donc des constantes. Ainsi, quel que soit α_{AB}, on a toujours $(u_{AB})_A = (u_{AB})_B$. Ainsi l'utilisation la relation (1) en composante dans $\mathcal{B}_A$ fournira $(R_{AB})_A$ et en composantes dans $\mathcal{B}_B$ elle fournira $(R_{AB})_B$, mais comme $(u_{AB})_A = (u_{AB})_B$, on aura $(R_{AB})_B = (R_{AB})_A$. Dans tout autre base, $\mathcal{B}_C$ par exemple, (obtenue par une rotation autour d'un axe différent de $\vec{u}_{AB}$), les composantes de $\vec{u}_{AB}$ seront différentes et on aura des composantes différentes pour $(R_{AB})_C$.

Si on exprime la relation de composition (7) en composantes dans $\mathcal{B}_A$ on obtient :

$$(\mathcal{R}_{AC})_A = (\mathcal{R}_{BC})_A\,(\mathcal{R}_{AB})_A \tag{8}$$

Dans cette expression, on sait exprimer $(\mathcal{R}_{AC})_A = C_{AC}$ et $(\mathcal{R}_{AB})_A = C_{AB}$. par contre on connait $(\mathcal{R}_{BC})_B = C_{BC}$ mais pas $(\mathcal{R}_{BC})_A$. Toutefois, en lui appliquant la formule de changement de base des opérateurs,on a :

$$(\mathcal{R}_{BC})_A = C_{AB}\,(\mathcal{R}_{BC})_B\,C_{AB}^T$$

et en reportant cette valeur dans le produit précédent, il vient :

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}_{AC})_A &= C_{AB}\,(\mathcal{R}_{AC})_A\,C_{AB}^T\,(\mathcal{R}_{AB})_A \\ (\mathcal{R}_{AC})_A &= C_{AB}\,(\mathcal{R}_{AC})_A\,C_{AB}^T C_{AB} = C_{AB}\,(\mathcal{R}_{AC})_A\end{aligned}$$

soit :

$$(\mathcal{R}_{AC})_A = (\mathcal{R}_{AB})_A\,(\mathcal{R}_{BC})_B \tag{9}$$

On retrouve l'ordre du produit des matrices de changement de base.

En conclusion : *Si toutes les composantes de matrices de rotation sont exprimées dans la même base, l'ordre du produit est l'ordre inverse des opérations (8), et si chaque opérateur est exprimé en composantes dans la base qu'il transforme, l'ordre du produit est l'ordre direct (9).*

5.4 Formulaire résumé

Changement de base d'un vecteur :

$$(V)_A = C_{AB}\,(V)_B$$

Transformation d'un vecteur (rotation, projection, modification par un opérateur quelconque [7]) :

$$(\sigma)_M = (J)_M\,(\Omega)_M$$

où $\vec{\Omega}$ est le vecteur qui est transformé, $\vec{\sigma}$ est le vecteur résultat de la transformation et $\mathcal{J}$ est l'opérateur qui transforme $\vec{\Omega}$ en $\vec{\sigma}$.

Changement de base d'un opérateur :

$$(J)_A = C_{AB}\,(J)_B\,C_{AB}^T$$

7. $\vec{\sigma} = \mathcal{J}\left(\vec{\Omega}\right)$ transformation du vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ en moment cinétique $\vec{\sigma}$ par le biais du tenseur d'inertie $\mathcal{J}$ se calcule généralement dans la base mobile $\mathcal{B}_M$ dans laquelle on connait les composantes $(J)_M$ du tenseur d'inertie.

Changement de bases multiples :

$$C_{AC} = C_{AB} C_{BC}$$

Composition d'opérateurs :

$$T_3\left(\vec{V}\right) = T_2\left(T_1\left(\vec{V}\right)\right) \to T_3 = T_2 \circ T_1 \to (T_3)_A = (T_2)_A (T_1)_A$$

mais également

$$R_{AC} = R_{BC} \circ R_{AB} \to \begin{cases} (\mathcal{R}_{AC})_F = (\mathcal{R}_{BC})_F (\mathcal{R}_{AB})_F \ , \forall \mathcal{B}_F \\ (\mathcal{R}_{AC})_A = (\mathcal{R}_{AB})_A (\mathcal{R}_{BC})_B \end{cases}$$

D'un point de vue pratique c'est toujours la dernière de ces deux relations qui est utilisée. En effet, pour la relation directement transcrite de la composition, il y a toujours une des matrices qui est mal appropriée. Si on projette tout dans $\mathcal{B}_A$, c'est $(\mathcal{R}_{BC})_A$ qui n'est pas connu, si on projette tout dans $\mathcal{B}_B$, on obtient $(\mathcal{R}_{AC})_B$ qui n'a pas d'utilité directe et si on projette dans $\mathcal{B}_C$, c'est $(\mathcal{R}_{AB})_C$ qui n'est pas connu. Dans les ouvrages théoriques (math sup, mat spé, licence mathématique), on ne se préoccupe pas du calcul des composantes, seuls les objets (tenseurs, c'est–à-dire vecteurs et opérateurs) manipulés sont considérés. C'est pour cela que la plupart des théoriciens purs qui n'ont pas de pratique de la programmation des orientations se laissent entrainer par l'ordre de la relation de composition et utilisent souvent la relation suivante qui est **totalement fausse** : $(\mathcal{R}_{AC})_A = (\mathcal{R}_{BC})_B (\mathcal{R}_{AB})_A$.

5.5 Quaternions et rotations

Pour utiliser les quaternions dans le traitement des problèmes relatifs aux rotations il faut utiliser la confusion de l'espace vectoriel E_3 utilisé pour la géométrie avec le sous-espace pur des quaternions.

5.5.1 Symétrie par rapport à un plan

Dans E_3 considérons un vecteur $\overrightarrow{W}$ symétrique d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ par rapport à un plan orthogonal à un vecteur $\overrightarrow{U}$ et considérons les quaternions purs W, V, et U. En notations matricielles, cette symétrie s'écrit :

$$W = V - 2\frac{U}{\|U\|}\frac{U^T}{\|U\|}V$$

soit :

$$W = V - 2\langle U \cdot V\rangle \frac{U}{\|U\|^2}$$

Dans le sous-espace pur de H, cette relation devient :

$$W = V + (UV + VU)\frac{U}{\|U\|^2}$$

Or U étant pur, son inverse est $U^{-1} = -\frac{1}{\|U\|^2}U$, d'où :

$$W = V - (UV + VU)U^{-1} = -UVU^{-1}$$

Il en résulte qu'avec la multiplication des quaternions, le quaternion pur W s'obtient par la relation :

$$W = -UVU^{-1}$$

5.5.2 Composition de deux symétries

Considérons deux symétries successives, la première $\mathcal{S}_A$ par rapport à un plan perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{A}$ et la deuxième $\mathcal{S}_B$ par rapport à un plan perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{B}$ et considérons un vecteur $\overrightarrow{M}$ qui devient $\overrightarrow{N}$ puis $\overrightarrow{P}$:

$$\overrightarrow{P} = \mathcal{S}_B\left(\overrightarrow{N}\right) \qquad \overrightarrow{N} = \mathcal{S}_A\left(\overrightarrow{M}\right)$$

En utilisant la multiplication des quaternions, il vient :

$$P = -BNB^{-1} \qquad N = -AMA^{-1}$$

d'où :

$$P = BAMA^{-1}B^{-1} = (BA)M(BA)^{-1}$$

soit :

$$P = (\lambda BA)M(\lambda BA)^{-1}$$

quel que soit le scalaire $\lambda \neq 0$.

5.5.3 Rotation

La succession des symétries $\mathcal{S}_A$ et $\mathcal{S}_B$ par rapport aux plans orthogonaux aux directions $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ produit une rotation d'angle $\alpha = 2\angle\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$, autour de la direction d'intersection des deux plans dont un vecteur unitaire est donné par $\overrightarrow{U} = \frac{1}{||\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}||}\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}$, ce qui s'écrit en terme d'applications $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{R}_{\alpha,U}$. Évaluons le quaternion BA en fonction de l'angle α et du vecteur $\overrightarrow{U}$:

$$BA = -\langle B\cdot A\rangle + B\times A$$

$$BA = -||A||\,||B||\cos\tfrac{\alpha}{2} - ||A||\,||B||\sin\tfrac{\alpha}{2}U$$

$$BA = -||A||\,||B||\left(\cos\tfrac{\alpha}{2} + \sin\tfrac{\alpha}{2}U\right)$$

Il en résulte que :

$$\boxed{P = RMR^{-1} \quad \text{avec} \quad R = \mu\left(\cos\tfrac{\alpha}{2} + \sin\tfrac{\alpha}{2}U\right) \quad \text{et} \quad \mu \neq 0} \tag{10}$$

où μ est un scalaire non nul quelconque.

Le vecteur $\overrightarrow{P}$ transformé du vecteur $\overrightarrow{M}$ par la rotation $\mathcal{R}_{\alpha,U}$ d'angle α autour du vecteur unitaire $\overrightarrow{U}$, s'obtient dans le sous-espace pur des quaternions par le double produit $P = RMR^{-1}$ où R est un quaternion dont seule la direction est significative. Un quaternion unitaire sur cette direction est donné par :

$$Q = \cos\tfrac{\alpha}{2} + \sin\tfrac{\alpha}{2}U$$

En utilisant ce quaternion unitaire, le double produit se simplifie en :

$$P = QMQ^*$$

Remarques :

Même en se limitant à des quaternions unitaires, il y en a deux différents qui permettent de calculer le quaternion pur P par la formule du double produit. Ce sont Q et $-Q$.

En posant $Q = \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}U$, lorsque α varie de 0 à l'infini, le quaternion Q décrit une infinité de fois un grand cercle de l'hypersphère S^3 de rayon 1 dans R^4, partant du quaternion unité 1 (pour $\alpha = 0$) et repassant par les mêmes quaternions avec une périodicité égale à 4π. Pour une étendue de 2π on ne décrit que la moitié du grand cercle, passant de Q à $-Q$.

En utilisant l'angle moitié, l'opérateur rotation se met également sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\alpha,U} &= I + \sin\alpha\,(U\times) + (1-\cos\alpha)\,(U\times)^2 \\ &= I + 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\,(U\times) + 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\,(U\times)\right)^2\end{aligned}$$

5.5.4 Produit de deux rotations

Considérons une deuxième rotation $\mathcal{R}_{\beta,V}$ à laquelle on associe le quaternion :

$$T = \nu\left(\cos\tfrac{\beta}{2} + \sin\tfrac{\beta}{2}V\right)$$

Cette rotation transforme le vecteur $\overrightarrow{P}$ en vecteur $\overrightarrow{W}$. Le quaternion pur W s'obtient par :

$$W = T\left(RMR^{-1}\right)T^{-1} = (TR)\,M\,(TR)^{-1}$$

Au produit de rotation $\mathcal{R}_{\beta,V} \circ \mathcal{R}_{\alpha,U}$ correspond donc le produit des quaternions associés TR. Il en résulte qu'il existe une bijection entre les rotations de E_3 et les directions de R^4, c'est-à-dire avec l'hypersphère unité S^3 dans laquelle on fait une identification antipodale (Q et $-Q$ sont identifiés ce qui définit un espace projectif de dimension 4). Dans cet isomorphisme l'image du produit des rotations est le produit des quaternions. Cet isomorphisme est limité à l'opération de composition (produit de rotations). En effet, si l'opérateur $\mathcal{F} = \mathcal{R}_{\beta,V} + \mathcal{R}_{\alpha,U}$ existe, ce n'est pas une rotation (ni une isométrie d'ailleurs). Dans l'espace des quaternions le transformé de M se calculerait par $TMT^{-1} + RMR^{-1}$ expression qui ne permet d'associer de quaternion particulier à $\mathcal{F}$.

5.5.5 Changement de base des quaternions

L'utilisation des quaternions pour traiter les problèmes de rotation est exactement similaire à celle des opérateurs rotations. En pratique, on travaille avec des composantes dans des bases. Considérons deux bases $\mathcal{B}_A$ et $\mathcal{B}_B$ de E_3 et les deux mêmes bases correspondantes dans le sous-espace pur des quaternions. Notons $\mathcal{R}_{\alpha,U}$ la rotation transformant $\mathcal{B}_A$ en $\mathcal{B}_B$. La relation :

$$\overrightarrow{P} = \mathcal{R}_{\alpha,U}\left(\overrightarrow{M}\right)$$

s'écrit en composantes dans $\mathcal{B}_A$:

$$(P)_A = [\mathcal{R}_{\alpha,U}]_A\,(M)_A$$

En remarquant que $(M)_A = (P)_B$ puisque $\overrightarrow{M}$ et $\mathcal{B}_A$ subissent la même rotation qui les transforment en $\overrightarrow{P}$ et $\mathcal{B}_B$, il vient :

$$(P)_A = [\mathcal{R}_{\alpha,U}]_A\,(P)_B$$

Si on considère les quaternions purs P et M, et le quaternion ordinaire $Q_{\alpha,U} = \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}U$, on aura en prenant toutes les composantes des quaternions P, M et U dans la base associée à $\mathcal{B}_A$:

$$[P]_A = [Q_{\alpha,U}]_A\,[M]_A\,[Q_{\alpha,U}]_A^{-1}$$

En utilisant le fait que $[M]_A = [P]_B$, il vient :

$$[P]_A = [Q_{\alpha,U}]_A\,[P]_B\,[Q_{\alpha,U}]_A^{-1}$$

De même que la matrice $C_{AB} = [\mathcal{R}_{\alpha,U}]_A = [\mathcal{R}_{\alpha,U}]_B$ est la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}_A$ et $\mathcal{B}_B$ dans E_3, on peut considérer que le quaternion $Q_{AB} = [Q_{\alpha,U}]_A = [Q_{\alpha,U}]_B$ est un quaternion de changement de base entre $\mathcal{B}_A$ et $\mathcal{B}_B$ dans le sous-espace pur de H.

Nous avons attiré l'attention du lecteur sur le fait que C_{AB} n'était pas un tenseur, mais un tableau permettant de calculer les changements de bases des composantes à l'aide de produits matriciels. De même Q_{AB} représente un pseudo-quaternion qui ne doit être utilisé que pour calculer les composantes d'un quaternion dans une base quand on les connait dans une autre :

$$[R]_A = Q_{AB}\,[R]_B\,Q_{AB}^{-1}$$

Si R est un quaternion quelconque $R = r + W$, on peut vérifier que quel que soit le quaternion Q_{AB} la composante scalaire r reste invariable dans le triple produit précédent. Cette formule permet donc d'effectuer des changements de base qui respectent les contraintes imposées pour définir la multiplication des quaternions (invariabilité de E_0 base du sous-espace scalaire et changement de base orthonormé dans le sous-espace pur).

Remarques :

1. Nous avons utilisé des crochets $[R]_A$ pour représenter les composantes des quaternions, pour marquer une différence avec les formules où figurent les composantes d'un vecteur de E_3. Par ailleurs en utilisant la réalisation des quaternions par des matrices réelles 4×4, cette notation peut être interprétée comme symbolisant ces matrices. Pour faire explicitement référence à la représentation matrice colonne 4×1, nous utilisons de préférence la forme $(R)_A$. Cependant aucune de ces deux formes n'est adaptée lorsqu'on écrit :

$$(r+W)_A = (r) + (W)_A$$
$$[r+W]_A = [r] + [W]_A$$

pour signifier que la composante r est invariante.

2. Ne pas oublier que $Q_{AB}^{-1} = Q_{AB}^{*}$ lorsque Q_{AB} est unitaire

Cas d'un quaternion pur

Posons :

$$[R]_A = \begin{pmatrix} 0 \\ W \end{pmatrix}_A,\ [R]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ W \end{pmatrix}_B \text{ et } Q_{AB} = \begin{pmatrix} s \\ V \end{pmatrix}$$

On peut vérifier dans ce cas que :

$$\boxed{(W)_A = (W)_B + \frac{2}{\|Q_{AB}\|^2}\left[sV\times(W)_B + V\times(V\times(W)_B)\right]} \tag{11}$$

Cette formule peut être utilisée pour effectuer un changement de base (ou une rotation) dans E_3 au moyen du quaternion associé.

Utilisation du changement de base dans E_3 pour H

Puisque les composantes scalaires restent inchangés et que les parties pures changent de base comme les vecteurs de E_3, on peut utiliser la matrice C_{AB} pour effectuer ce changement de base. En notant $(R)_A$ et $(R)_B$ les composantes organisées en vecteur colonne du quaternion R dans les bases associées à $\mathcal{B}_A$ et $\mathcal{B}_B$, il vient :

$$(R)_A = \begin{pmatrix} 1 & 0\,0\,0 \\ 0 & \\ 0 & C_{AB} \\ 0 & \end{pmatrix} (R)_B$$

5.5.6 Produit de changements de base

Si on considère une troisième base $\mathcal{B}_C$, on voit que :

$$\left.\begin{array}{l} [R]_A = Q_{AB}\,[R]_B\,Q_{AB}^{-1} \\ [R]_B = Q_{BC}\,[R]_C\,Q_{BC}^{-1} \end{array}\right\} \to [R]_A = Q_{AB}Q_{BC}\,[R]_C\,Q_{BC}^{-1}Q_{AB}^{-1}$$

qui compte tenu de :

$$[R]_A = Q_{AC}\,[R]_C\,Q_{AC}^{-1}$$

implique :

$$Q_{AC} = Q_{AB}Q_{BC}$$

Les pseudo-quaternions de changement de base obéissent aux mêmes règles de produit que les matrices de changement de base.

5.5.7 Matrice de rotation associée à un quaternion

Considérons le quaternion de rotation unitaire :

$$Q = \cos\tfrac{\alpha}{2} + \sin\tfrac{\alpha}{2}U = s + V$$

Il lui correspond l'opérateur de rotation :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\alpha,U} &= I + \sin\alpha\,(u\times) + (1-\cos\alpha)\,(u\times)^{\,2} \\ &= I + 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\,(u\times) + 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\,(u\times)\right)^2 \\ &= I + 2s\,(V\times) + 2\,(V\times)^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{R}_{\alpha,u} = I + 2s\,(V\times) + 2\,(V\times)^2}$$

Compte tenu de la relation remarquable $\|V\|^2\, I + \widetilde{V}^{\,2} = VV^T$, et avec $V^T = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, sans oublier que $x^2+y^2+z^2 = 1-s^2$, cette relation s'écrit également :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\alpha,u} &= s^2 I + 2s\,(V\times) + VV^T + (V\times)^2 \\ &= \left(2s^2-1\right) I + 2s\,(V\times) + 2VV^T \end{aligned}$$

La deuxième ligne permet de voir que la relation (11) correspond effectivement à $(W)_A = [\mathcal{R}_{\alpha,u}]\,(W)_B$.
La première ligne permet d'écrire la matrice $\mathcal{R}_{\alpha,u}$ sous la forme :

$$\mathcal{R}_{\alpha,u} = (sI + (V\times))^2 + VV^T$$

ce qui permet de mettre $\mathcal{R}_{\alpha,u}$ sous forme d'un produit de 2 matrices rectangulaires :

$$\mathcal{R}_{\alpha,u} = \begin{bmatrix} sI + (V\times) & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI + (V\times) \\ V^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI + (V\times) & -V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI + (V\times) \\ -V^T \end{bmatrix}$$

Bien faire attention aux signes, car on a également l'identité remarquable :

$$I = \begin{bmatrix} sI + (V\times) & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI + (V\times))^T \\ V^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI + (V\times) & -V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI + (V\times))^T \\ -V^T \end{bmatrix}$$

Dans le détail, les composantes de $\mathcal{R}_{\alpha,u}$ s'écrivent :

$$[\mathcal{R}_{\alpha,u}] = \begin{pmatrix} \left(x^2+s^2\right)-\left(y^2+z^2\right) & 2\,(xy-sz) & 2\,(xz+sy) \\ 2\,(yx+sz) & \left(y^2+s^2\right)-\left(z^2+x^2\right) & 2\,(yz-sx) \\ 2\,(zx-sy) & 2\,(zy+sx) & \left(z^2+s^2\right)-\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix}$$

5.5.8 Quaternion associé à une matrice de rotation

Considérons le quaternion unitaire $Q = s + V$ associé à l'opérateur rotation $\mathcal{R}_{\alpha,u}$. En utilisant sur la formule précédente l'identification des parties antisymétriques et symétriques on obtient :

$$\begin{aligned} s\widetilde{V} &= \frac{1}{4}\left(\mathcal{R}_{\alpha,u} - \mathcal{R}_{\alpha,u}^T\right) \\ \widetilde{V}^2 &= \frac{1}{4}\left(\mathcal{R}_{\alpha,u} + \mathcal{R}_{\alpha,u}^T - 2I\right) \end{aligned} \tag{12}$$

Notons r_{ij} les composantes de $\mathcal{R}_{\alpha,u}$ dans une certaine base $\mathcal{B}$ et x, y et z les composantes de V dans cette même base. La première relation permet d'écrire :

$$\begin{aligned} sx &= \frac{1}{4}(r_{32} - r_{23}) \\ sy &= \frac{1}{4}(r_{13} - r_{31}) \\ sz &= \frac{1}{4}(r_{21} - r_{12}) \end{aligned}$$

et la deuxième :

$$\begin{aligned} -(y^2+z^2) &= \frac{1}{2}(r_{11}-1) \qquad & yz &= \frac{1}{4}(r_{23}+r_{32}) \\ -(x^2+z^2) &= \frac{1}{2}(r_{22}-1) \qquad & zx &= \frac{1}{4}(r_{31}+r_{13}) \\ -(x^2+y^2) &= \frac{1}{2}(r_{33}-1) \qquad & xy &= \frac{1}{4}(r_{12}+r_{21}) \end{aligned}$$

De plus compte tenu du fait que $s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$, on obtient également :

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{4}(1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}) \\ x^2 &= \frac{1}{4}(1 + r_{11} - r_{22} - r_{33}) \\ y^2 &= \frac{1}{4}(1 - r_{11} + r_{22} - r_{33}) \\ z^2 &= \frac{1}{4}(1 - r_{11} - r_{22} + r_{33}) \end{aligned}$$

Étant donné que le sens de Q est indifférent, on peut choisir le signe de s et calculer sa valeur par la première relation du dernier groupe, puis calculer x, y et z par le premier groupe de relations. Si s est voisin de zéro, on peut calculer la plus grande des composantes de V par une équation du dernier groupe, puis calculer les deux autres et s à partir des produits du premier groupe.

5.5.9 Conversion en représentation angulaire

Angles d'Euler Considérons la rotation définie par les angles d'Euler, $R_{ZXZ}(\psi, \theta, \phi)$. En effectuant le produit des trois quaternions associés aux trois rotations, exprimés dans les bases transformées, on obtient :

$$Q_{03} = Q_{01} Q_{12} Q_{23}$$

$$Q_{03} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\psi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sin\frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sin\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}$$

Utilisons les formules (2) pour effectuer ces produits :

$$Q_{03} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sin\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}$$

$$Q_{03} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} \\ \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} \\ \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} - \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} \\ \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\boxed{Q_{03} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\phi}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\phi}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\phi}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\phi}{2} \end{pmatrix}}$$

Réciproquement, en posant $Q_{03} = (s, x, y, z)^T$ il vient :

$$\boxed{\begin{array}{c}\psi = \operatorname{atan2}(z,\, s) + \operatorname{atan2}(y,\, x)\\ \theta = \arccos\left(s^2 + z^2 - x^2 - y^2\right)\\ \phi = \operatorname{atan2}(z,\, s) - \operatorname{atan2}(y,\, x)\end{array}}$$

Angles aéronautique Considérons la rotation définie par les trois angles utilisés en aéronautique (ψ : azimut, θ : assiette longitudinale et ϕ : angle de roulis) $R_{ZYX}(\psi, \theta, \phi)$. En effectuant le produit des trois quaternions associés aux trois rotations, exprimés dans les bases transformées, on obtient :

$$Q_{03} = Q_{01} Q_{12} Q_{23}$$

$$Q_{03} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\psi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sin\frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ 0 \\ \sin\frac{\theta}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} \\ \sin\frac{\phi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utilisons les formules (2) pour effectuer ces produits :

$$Q_{03} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} \\ \sin\frac{\phi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\boxed{Q_{03} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} \\ -\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} \\ \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} \\ \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} - \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}}$$

Réciproquement, en posant $Q_{03} = (s, x, y, z)^T$, l'extraction de ψ, θ et ϕ à partir des relations précédentes ne semble pas évidente. En combinant les relations inverses établies pour la matrice de rotation, et les formules donnant la matrice de rotation à partir des composantes du quaternion, on trouve :

$$\boxed{\begin{array}{c}\psi = \operatorname{atan2}\left[2(sz + xy),\, \left(s^2 + x^2 - y^2 - z^2\right)\right]\\ \theta = \arcsin\left[2(sy - xz)\right]\\ \phi = \operatorname{atan2}\left[2(sx + yz),\, \left(s^2 + z^2 - x^2 - y^2\right)\right]\end{array}}$$

5.5.10 Résumé

	Avec des matrices	Avec des quaternions
Rotation d'un vecteur $\vec{W} = \mathcal{R}\left(\vec{V}\right)$	$(W)_F = (\mathcal{R})_F (V)_F$	$(W)_F = (Q)_F (V)_F \left(Q^{-1}\right)_F$
Changement de base d'un vecteur	$(V)_A = C_{AB} (V)_B$	$(V)_A = Q_{AB} (V)_B Q_{AB}^{-1}$
Changement de base d'un opérateur rotation	$(\mathcal{R})_A = C_{AB} (\mathcal{R})_B C_{AB}^T$	$(Q)_A = Q_{AB} (Q)_B Q_{AB}^{-1}$
Changement de bases multiples	$C_{AC} = C_{AB} C_{BC}$	$Q_{AC} = Q_{AB} Q_{BC}$
Produit de rotations $\mathcal{R}_{AC} = \mathcal{R}_{BC} \circ \mathcal{R}_{AB}$	$\begin{cases} (\mathcal{R}_{AC})_F = (\mathcal{R}_{BC})_F (\mathcal{R}_{AB})_F \\ (\mathcal{R}_{AC})_A = (\mathcal{R}_{AB})_A (\mathcal{R}_{BC})_B \end{cases}$	$\begin{cases} (Q_{AC})_F = (Q_{BC})_F (Q_{AB})_F \\ (Q_{AC})_A = (Q_{AB})_A (Q_{BC})_B \end{cases}$

Remarques :

Ligne 1 : $\mathcal{B}_F$ est une base quelconque dans laquelle on exprime toutes les composantes. Coté matrices $(W)_F$ et $(V)_F$ sont les vecteurs colonnes des composantes des vecteurs et $(\mathcal{R})_F$ est la matrice 3x3 de composantes de l'opérateur rotation. Coté quaternion $(W)_F$ et $(V)_F$ sont les quaternions purs associés aux vecteurs et $(Q)_F$ est le quaternion de rotation associé à $(\mathcal{R})_F$.

Ligne 2 : Coté matrices $(V)_A$ et $(V)_B$ sont des vecteurs colonnes des composantes du vecteur et C_{AB} est la matrice 3x3 des coefficients de changement de base. Coté quaternion $(V)_A$ et $(V)_B$ sont les quaternions purs associés au vecteur dans les deux bases considérées et Q_{AB} est le quaternion de rotation (en fait de changement de base) associé à C_{AB}.

Ligne 3 : Coté matrices $(\mathcal{R})_A$ et $(\mathcal{R})_B$ sont les matrice 3x3 des composantes de l'opérateur rotation et C_{AB} est la matrice 3x3 des coefficients de changement de base. Coté quaternion $(\mathcal{Q})_A$ et $(\mathcal{Q})_B$ sont les quaternions de rotation associés à $(\mathcal{R})_A$ et $(\mathcal{R})_B$ et Q_{AB} est le quaternion de rotation (en fait de changement de base) associé à C_{AB}.

Ligne 4 : Q_{AB}, Q_{BC}, et Q_{AC} sont les quaternions de rotation associés aux matrices de changement de base C_{AB}, C_{BC}, et C_{AC}.

Ligne 5 : $\mathcal{Q}_{AB}$, $\mathcal{Q}_{BC}$, et $\mathcal{Q}_{AC}$ sont les quaternions de rotation associés aux rotations$\mathcal{R}_{AB}$, $\mathcal{R}_{BC}$, et $\mathcal{R}_{AC}$. Dans les expressions supérieures $\mathcal{B}_F$ est une base quelconque dans laquelle on exprime toutes les composantes et l'ordre des éléments est celui du produit de composition. Dans les lignes inférieures on utilise les composantes dans les bases de départ et l'ordre des éléments est celui de l'application des opérateurs.

Rappel :

$$(\mathcal{R}_{AB})_A = (\mathcal{R}_{AB})_B \text{ que l'on note } R_{AB} \text{ ou } C_{AB}$$
$$(\mathcal{Q}_{AB})_A = (\mathcal{Q}_{AB})_B \text{ que l'on note } Q_{AB}$$

En résumé : Les relations sont identiques en matrices et en quaternions (isomorphisme pour le produit), lorsqu'il n'y a pas de vecteurs, et pour les vecteurs, le quaternion pur associé à un vecteur est traité comme un opérateur (pré- et post-multiplié).

6 Conclusion

Pour traiter des problèmes d'attitude, on peut pratiquement toujours se passer des quaternions et utiliser les traditionnelles matrices de rotation qui sont plus pratiques et à mon avis plus économes en temps de calcul dès que les composantes de plusieurs vecteurs sont à actualiser.

Toutefois j'ai déjà mentionné que les quaternions sont intéressants pour décrire des trajectoires analytiques en attitude, bien que personnellement j'ai obtenu des résultats plus intéressants avec le vecteur rotation défini au paragraphe 2.3.1.

Un autre cas où les quaternions présentent un éventuel avantage sur les matrices de rotation c'est pour l'estimation d'un mouvement d'attitude à partir de la connaissance du vecteur vitesse de rotation. L'estimation d'attitude à partir du vecteur vitesse de rotation est un classique de la gestion des mouvements des corps solides (satellites, avions, drones, ...). Dans ce cadre, mais sans rapport direct avec l'utilisation des quaternions, je tiens à attirer l'attention sur le fait qu'on obtient de bien meilleurs résultats que ceux fournis par les méthodes classiques d'intégration additive (méthodes de Runge-Kutta et autres) en effectuant une intégration multiplicative [8] réalisant l'application des micro-rotations successives. L'isomorphisme existant entre les quaternions et les matrices de rotation semble indiquer que l'on aura la même précision d'intégration en effectuant les multiplications par les micro-rotations qu'elles soient sous forme de quaternion ou de matrice ; mais précision sous-entend erreur, et l'erreur cumulée au cours du temps rend peu à peu le quaternion ou la matrice résultat non unitaire. Pour le quaternion cela n'a aucune importance, il suffit de le normer de temps en temps (ou systématiquement). Pour la matrice, l'opération consistant à calculer la matrice unitaire la plus proche (au sens des moindres carrés en général) est plus lourde en calculs, mais sans que cela soit significatif, si on ne fait pas cette opération à chaque pas.

8. Voir page 94 du document http ://www.llibre.fr/copie_cert/DCSD-2009_008-NOT-003-1.1.pdf